

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی و آمار	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : انسانی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۸ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

۱ دامنه و بُرد تابع $\text{sign}(x) = -1$ کدام است؟

۲ نقطه $(1 - 2a, a + 10)$ روی نیمساز ناحیه اول قرار دارد و تابع $\left\{ (2, a - 1), (3, \frac{b}{p}) \right\}$ تابعی ثابت است. مقدار a و b را بیابید.

۳ اگر $f(x) = -|x - 1|$ و $g(x) = [2x - 3]$ ، آنگاه حاصل $(\frac{g}{f})(\frac{1}{p})$ کدام است؟

۴ نمودار $y = |x - 2| + 3$ را رسم کنید.

۵ تابع $f(x) = |x + 3|$ را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید و سپس نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۶ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x > 0 \\ 4x + 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس مقادیر $f(-3)$ و $f(f(1))$ را بیابید.

۷ حاصل زیر را بیابید.

$$\text{sign}(x^2 + 1) - \text{sign}(-x^2 - 2)$$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها، درستی قاعدهٔ قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۹ در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ و $f(a + b)$ را مشخص کنید.

ب اگر در این تابع $f(a + b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۱۰ اگر $f(x) = ax + b$ تابعی ثابت و $g(x) = mx + n$ و $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی همانی باشد، حاصل $\frac{a+m}{b-n}$ را بیابید.

۱۱ باتوجه به جدول زیر در جای خالی Δ و \square چه ارزیابی باید گذاشت؟

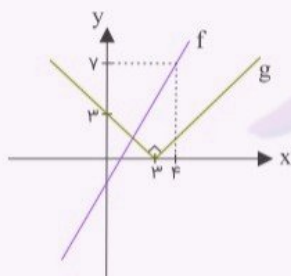
q	$\sim p$	r	$\sim (p \Rightarrow q)$	$(q \wedge r) \Leftrightarrow p$	$q \Leftrightarrow \sim p$
F	T	T	\bigcirc	Δ	\square

۱۲ اگر $f = \{(2, 5), (-1, 0), (3, 7)\}$ و $g = \{(2, 2), (3, 6), (0, 1)\}$ باشد:

توابع $f - g$ و $f \times g$ را مشخص کنید.

۱۳ مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را حساب کنید.

۱۴ باتوجه به شکل زیر حاصل $(f + g)(2)$ را به دست آورید.



۱۵

اگر گزاره $(\sim p \vee q)$ درست و گزاره $(\sim q)$ نادرست باشد، آنگاه $(\sim p \vee p) \wedge (p \wedge \sim q)$ دارای چه ارزشی است؟

۱۶

فرمول قیاس استثنایی و مغالطه را نوشته و برای هر یک مثالی بزنید.

۱۷

در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$$

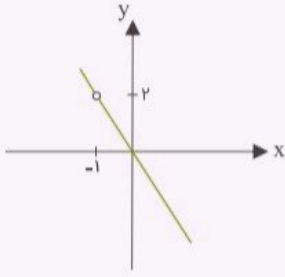
ب

$$f(3) + f(0)$$

۱۸

اگر $\text{sign}(x^2 + 2x - 3) = 0$ باشد، مقدار x را بیابید.

۱۹ اگر $f(x) = 5x^2$ و نمودار $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت زیر باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.



۲۰ اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $R_f = \{7, 13, 43\}$ برد تابع f باشند، دامنه تابع f را بیابید.

۲۱ در تابع g ، مطلوب است:

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; x > 0 \\ 5 & ; x = 0 \\ |x^2 - 1| & ; x < 0 \end{cases}$$

الف $g(\frac{2}{3})$

ب $g(-\sqrt{2})$

۲۲ اگر $p \vee q \equiv F$ و r دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

۲۳ نمودار تابع $y = |ax - b|$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۹ قطع می‌کند. در این صورت حاصل $a - |b|$ را بیابید.

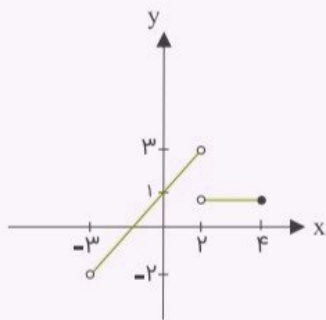
۲۴ اگر $f(x) = \begin{cases} (k-3)x^2 - 2m & ; x \geq 2 \\ (m+4)x + k & ; x < 2 \end{cases}$ تابعی پلکانی باشد، حاصل $f(1) + f(3)$ را بیابید.

۲۵ اگر f تابعی ثابت باشد و به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}f(x) - 2$$

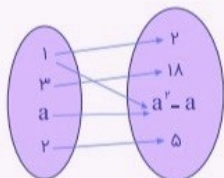
در این صورت حاصل $f(3) \times f(-5)$ را بیابید.

۲۶ اگر نمودار f به صورت زیر باشد، ضابطه این تابع را بیابید.



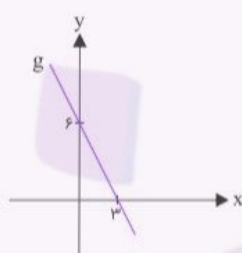
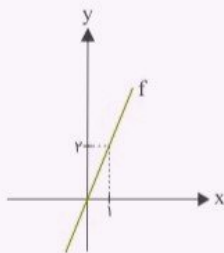
اگر نمودار زیر تابع باشد، مقدار a را بیابید.

۲۷



اگر نمودار g و f مطابق شکل زیر باشد، نمودار $f + g$ را رسم کنید.

۲۸



نمودار $y = -|2x - 6|$ را رسم کنید.

۲۹

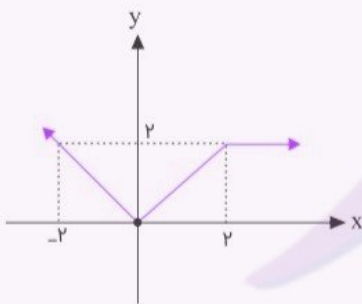
۳۰ اگر $f(x) = 4x^2 + 7x - 2$ و $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$ باشد، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

۳۱ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، حاصل را به ازای مقادیر زیر را بیابید.

$$x = 1/8, \quad x = -6$$

۳۲ اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ باشد دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

۳۳ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی و آمار	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : انسانی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۹ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		نمره

۱

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sign}(x) = -1 \Rightarrow \text{دامنه } : x < 0 \text{ یا } (-\infty, 0)$$

$$\Rightarrow \text{برد} = \{-1\}$$

۲

چون نقطه $(1 - 2a, a + 10)$ روی نیمساز ناحیه اول است پس $y = x$ است.

$$1 - 2a = a + 10 \Rightarrow -3a = 9 \Rightarrow a = -3$$

و چون $\left\{ (2, a - 1), (3, \frac{b}{2}) \right\}$ تابعی ثابت است پس مؤلفه‌های دوم باهم برابرند.

$$a - 1 = \frac{b}{2} \xrightarrow{a=-3} -4 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -8$$

۳

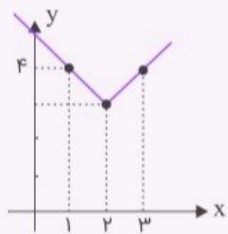
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left|\frac{1}{2} - 1\right| = -\left|-\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\right] = [1 - 3] = [-2] = -2$$

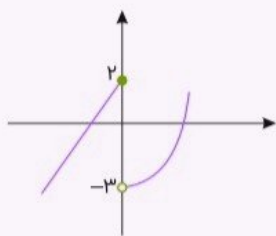
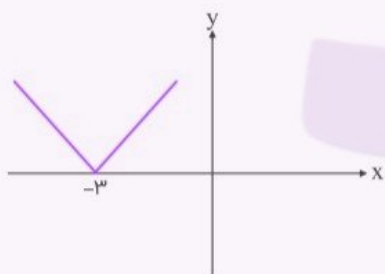
$$\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

$$y = |x - 2| + 3$$

x	۱	۲	۳
y	۴	۳	۴



$$f(x) = |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & ; x \geq -3 \\ -x - 3 & ; x < -3 \end{cases}$$



$$f(-3) = 4(-3) + 2 = -10$$

$$f(f(1)) = f(-2) = 4(-2) + 2 = -6$$

$$\underbrace{\text{sign}(x^2 + 1)}_{\text{همواره مثبت}} - \underbrace{\text{sign}(-x^2 - 2)}_{\text{همواره منفی}} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

همواره صحيح است.

$$f(a) = c, \quad f(b) = c, \quad f(a+b) = c$$

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \Rightarrow c = c^2$$

$$\Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = mx + n \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a+m}{b-n} = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

چون $\sim p$ درست است پس $p \equiv F$. بنابراین $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است در نتیجه $(p \Rightarrow q) \sim$ نادرست است پس $\bigcirc \equiv F$ و $q \wedge r \equiv F$ چون q نادرست است و همچنین چون p هم نادرست است، پس $((q \wedge r) \Leftrightarrow p) \equiv T$ پس $\Delta \equiv T$ و در نهایت $q \Leftrightarrow \sim p$ دارای ارزش نادرست است، پس $\square \equiv F$.

توجه: در ترکیب دوشروطی اگر هر دو گزاره هم‌ارزش باشند، گزاره دوشروطی درست است.

پاسخ سؤالات ۱۲ تا ۱۳

$$f - g = \{(2, 3), (3, 1)\}$$

$$f \times g = \{(2, 10), (3, 42)\}$$

$$f \times g = \{(2, 10), (3, 42)\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{2} = 2/5$$

ابتدا ضابطه f و g را به دست می‌آوریم و از آنجا که تابع مجموع را در $x = 2$ خواسته، کافی است ضابطه تابع g را در حالتی که $x \leq 3$ است، به دست آوریم:

$$f: \left| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \Rightarrow m = \frac{4}{5}, y = \frac{4}{5}x \Rightarrow f(x) = \frac{4}{5}x$$

$$g: \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \right| \Rightarrow m' = -1 \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \frac{4}{5}(2) + (-2+3) = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$$

$\sim (\sim q) \equiv q$ پس q نادرست است و از طرفی چون $(\sim p \vee q)$ درست است و q نادرست است، بنابراین $\sim p$ درست بوده و p هم نادرست می‌شود. حال خواسته مسئله را ارزش‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{(\sim p \vee \overset{F}{p})}_{\downarrow T} \equiv T, \quad \underbrace{(p \wedge \sim q)}_{\substack{\downarrow F \\ \downarrow T}} \equiv F$$

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q) \equiv T \wedge F \equiv F$$

قیاس:

$$p \Rightarrow q$$

$$\frac{p}{\therefore q}$$

مثال:

اگر سارا ازدواج کند، آنگاه شیرینی می‌آورد.

سارا ازدواج کرده است.

\therefore شیرینی می‌آورد.

مغالطه:

$$p \Rightarrow q$$

$$\frac{q}{\therefore p}$$

مثال:

اگر برف بیاید، آنگاه هوا سرد می‌شود.

هوا سرد شده است.

برف آمده است.

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) \Rightarrow x + x^2 \Rightarrow -\sqrt{2} + (\sqrt{3})^2 = -\sqrt{2} + 3$$

$$f(3) + f(0) \Rightarrow 5 + x^2 \Rightarrow 5 + 0 = 5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{matrix}$$

ضابطه $(\frac{f}{g})(x)$ را با توجه به نمودار به دست می آوریم.

دو نقطه از آن داریم: 0 و $-\frac{1}{2}$ ، پس:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 0) \\ \Rightarrow y = -2x$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow -2x = \frac{5x^2}{g(x)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{5x^2}{-2x} \Rightarrow g(x) = -\frac{5}{2}x, \quad x \neq -1$$

ضابطه تابع f را با اعضای برد مساوی هم قرار می دهیم:

$$x^2 - x + 1 = 7 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} x=3 \\ x=-2 \end{matrix} \right.$$

$$x^2 - x + 1 = 13 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} x=4 \\ x=-3 \end{matrix} \right.$$

$$x^2 - x + 1 = 43 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+6) = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} x=7 \\ x=-6 \end{matrix} \right.$$

$$D_f = \{-2, 3, -3, 4, -6, 7\}$$

$$g(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3}) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$g(-\sqrt{2}) = |(-\sqrt{2})^2 - 1| = |2 - 1| = |1| = 1$$

ب

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \text{و} \\ q \equiv \text{و} \end{cases}$$

$r \equiv$ دلخواه

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

$$(\text{د} \Rightarrow r) \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \text{د} \Rightarrow (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \equiv T \\ r \equiv \text{و} \Rightarrow (\text{و} \Rightarrow \text{د}) \equiv T \end{cases} \equiv T$$

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \text{و} \\ q \equiv \text{و} \end{cases}$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\text{د} \Leftrightarrow \text{د} \equiv T$$

ب

چون محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند و محور yها را در عرض ۹ قطع می‌کند، پس $A \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \end{vmatrix}$ روی نمودار قرار دارند. در نتیجه:

۲۳

$$B \Rightarrow 9 = |a(0) - b| \Rightarrow 9 = |-b| \Rightarrow |b| = 9 \Rightarrow b = \pm 9$$

$$A \Rightarrow 0 = |a(3) - b| \Rightarrow |3a - b| = 0 \Rightarrow 3a - b = 0 \Rightarrow 3a = b$$

$$a = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{\pm 9}{3} = \pm 3$$

بنابراین:

$$a - |b| = \pm 3 - 9 \begin{cases} 3 - 9 = -6 \\ -3 - 9 = -12 \end{cases}$$

چون f تابعی پلکانی است پس ضابطه‌های آن تابعی ثابت هستند، بنابراین ضریب x و x^2 باید صفر باشند، پس:

$$k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3$$

$$m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

یعنی تابع f به صورت زیر درمی آید:

$$f(x) = \begin{cases} -2(-4) & ; x \geq 2 \\ 3 & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 8 & ; x \geq 2 \\ 3 & ; x < 2 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$f\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ضابطه پایین}}}{1}\right) + f\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ضابطه بالا}}}{3}\right) = 3 + 8 = 11$$

چون f تابعی ثابت است، پس $f(x) = k$ در نتیجه:

$$f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}k - 2 \Rightarrow \frac{2}{3}k = -2 \Rightarrow k = -3$$

بنابراین داریم $f(x) = -3$ ، در نتیجه:

$$f(3) \times f(-5) = -3 \times -3 = 9$$

دامنه تابع داده شده دارای ۲ قسمت است؛ یکی $2 < x < 3$ و دیگری $3 < x \leq 4$ و اگر معادله خطها را بنویسیم، داریم:
اگر $2 < x < 3$:

$$A \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m = \frac{-2 - 3}{-3 - 2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

و اگر $2 < x \leq 4$ باشد، داریم $f(x) = 1$ که تابعی ثابت می باشد.
بنابراین داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; -3 < x < 2 \\ 1 & ; 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

چون تابع است و از ۱ دو پیکان خارج شده است، پس:

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \begin{cases} \text{غ ق ق} & a = 2 \\ \text{ق ق} & a = -1 \end{cases}$$

اگر $a = 2$ باشد، تابع نمی باشد چون زوج مرتبهای $(2, 2)$ ، $(2, 5)$ داریم. پس $a = -1$ قابل قبول است.

تابع f از نقاط $\left| \begin{smallmatrix} ۱ \\ ۲ \end{smallmatrix} \right|$ و $\left| \begin{smallmatrix} ۰ \\ ۰ \end{smallmatrix} \right|$ می‌گذرد، بنابراین معادله خط f عبارت است از:

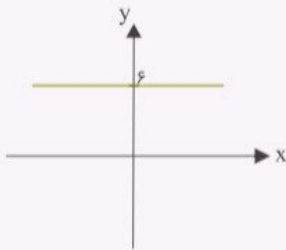
$$m = \frac{۲ - ۰}{۱ - ۰} = ۲ \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۰) \Rightarrow y = ۲x \Rightarrow f(x) = ۲x$$

و تابع g از نقاط $\left| \begin{smallmatrix} ۰ \\ ۶ \end{smallmatrix} \right|$ و $\left| \begin{smallmatrix} ۳ \\ ۰ \end{smallmatrix} \right|$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{۶ - ۰}{۰ - ۳} = -۲ \Rightarrow y - ۶ = -۲(x - ۰) \Rightarrow g(x) = -۲x + ۶$$

$$f + g = ۲x + (-۲x + ۶) = ۶$$

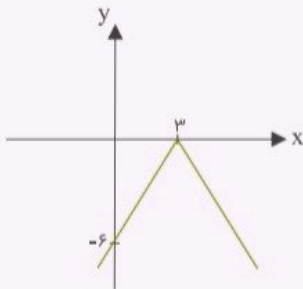
پس نمودار $f + g$ به صورت زیر می‌باشد:



منفی پشت قدر مطلق می‌گوید شکل آن به صورت شکل می‌باشد و اگر ریشه داخل قدر مطلق را به دست آوریم، داریم:

$$۲x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

و اگر محل برخورد شکل با محور y ها را بخواهیم به دست آوریم باید $x = ۰$ باشد. یعنی $x = ۰ \Rightarrow y = -۶$ پس شکل به صورت زیر است:



$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

تابع f و g چندجمله‌ای هستند پس $D = \mathbb{R}$. فقط باید x هایی که $g(x)$ را صفر می‌کند به دست آوریم؛ پس معادله $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را حل می‌کنیم و چون مجموع ضرایب صفر است، داریم:

$$x = 1, \quad x = \frac{2}{3}$$

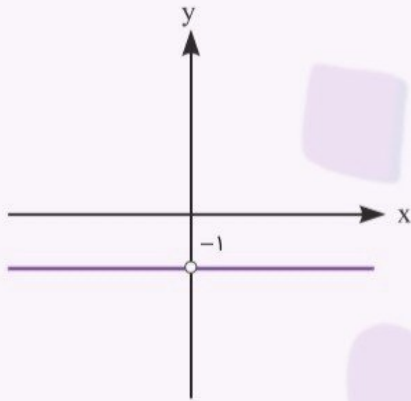
بنابراین:

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از: $x = 1$, $x = \frac{c}{a}$.

$$f(1/8) = [1/8] + [-1/8] = -1$$

$$f(-6) = [-6] + [+6] = 0$$



$$\frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} -1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

تابع سه قسمت است، پس سه ضابطه‌ای می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$